

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 135

A2. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 51

A3. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 23

A4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Θετώ όπου $x - 1$ το y και έχω
 $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$

Επομένως

$$f(y) = y \cdot e^{1-y}$$

$$\text{Άρα } f(x) = x \cdot e^{1-x}$$

B2. Η f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$f'(x) = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x)$$

$$f'(x) = 0 \stackrel{e^{1-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘
	max		

Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

B3. $f''(x) = -e^{1-x} \cdot (1-x) - e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (-1+x-1)$

$\Leftrightarrow f''(x) = e^{1-x} \cdot (x-2)$

$f''(x) = 0 \stackrel{e^{1-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x) = 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

X	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$	↪		↗

Σ.Κ.

Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f κύρτη στο $[2, +\infty)$

Η C_f έχει σημείο καμπής το $(2, \frac{2}{e})$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{u \rightarrow +\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{u \rightarrow -\infty} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{u=1-x}{u \rightarrow -\infty} =$
 $= \lim_{u \rightarrow -\infty} (1-u) \cdot e^u = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1-u}{e^{-u}} =$

$\stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\Delta L'H} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{(1-u)'}{(e^{-u})'} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-u}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$

Η ευθεία $\varepsilon: y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

i) Αφού f συνεχής

$$f((-\infty, 1]) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{γιατί: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} = \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (1-u)e^u = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$f([1, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)) = (0, 1]$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1]$

ii)

- Αν $\lambda \leq 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \notin (0, 1]$.
- Αν $0 < \lambda < 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \in (0, 1]$.
- Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα το $x = 1$ γιατί για $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 1$ και για $x > 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 1$.
- Αν $\lambda > 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική.

Η f συνεχής στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ έχει ελάχιστο στο π ως τριγωνομετρική $f(\pi) = -1$

Στο $x_0 = 0$ έχω

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1$$

$$f(0) = 1$$

Άρα f συνεχής και στο $x_0 = 0$

Γενικά f συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^2 - 3x - 1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ δεν υπάρχει, δηλ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2 i)

· η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ από Γ1

· η f παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = (\sin x)' = -\eta\mu x$

· $f(0) = 1$

· $f(\frac{3\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} = 0$

· $f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$

Άρα δεν ισχύει το Θεώρημα Rolle

ii)

$\forall x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ έχω $f'(x) = -\eta\mu x$

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\xi = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \xi = 2k\pi \text{ ή } \xi = 2k\pi + \pi$

$\Leftrightarrow \xi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$0 < \xi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$0 < k\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < k < \frac{3}{2}$

Αφού $k \in \mathbb{Z}, k = 1$

Άρα $\xi = \pi$

Γ3. Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty, 0)$

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$$

$$\Delta = 36 + 12a$$

$$\text{Έχω } a < -3 \Rightarrow 12a < -36 \Leftrightarrow 36 + 12a < -36 + 36 \Leftrightarrow \Delta < 0$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη

Γ4. Έχω $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

Αφού $f'(x)$ έχει $\Delta < 0$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

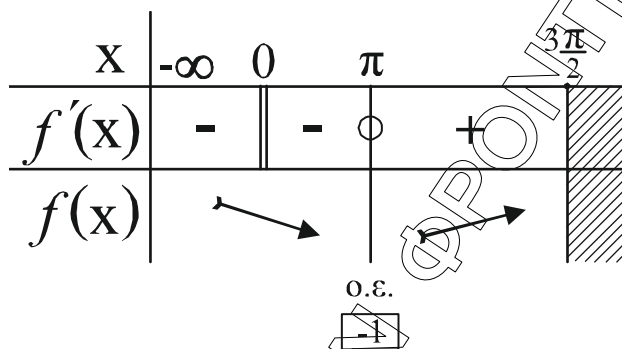
$$f'(x) = -\eta\mu x < 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$

Αφού f συνεχής στο 0 έχω f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$

$$f'(x) = -\eta\mu x > 0 \quad \forall x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$



Η f έχει ελάχιστο στο π το $f(\pi) = -1$, άρα $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \quad \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Θεωρώ } K(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

·η $K(x)$ συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών

$$\cdot K(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\cdot K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$$

$$\Rightarrow K(1) \cdot K(e) < 0$$

Από Θ. Bolzano $\exists x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$

$$K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in (0, +\infty)$$

$K(x)$ \nearrow στο $(0, +\infty)$

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα.

$$\Delta 2. \quad f(x) = (\ln x)(x + 1) - \ln x - 1$$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$$

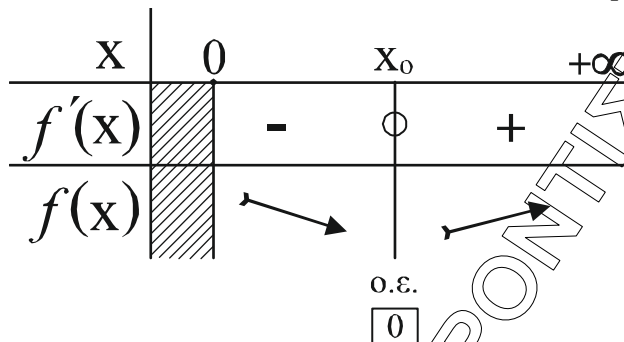
έχει προφανή ρίζα από $\Delta 1$ το x_0

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f' \text{ γνησίως αύξουσα}$$

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$

$$\text{Για } 0 < x < x_0 \stackrel{f' \text{ γν. αὐξ.}}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } (0, x_0]$$

$$\text{Για } x > x_0 \stackrel{f' \text{ γν. αὐξ.}}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στο } [x_0, +\infty)$$



Άρα έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 με

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 \stackrel{\text{από Δ1}}{=} \frac{x_0 + 1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3 $g(x) = x \cdot e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, x \in \mathbb{R}$$

Για $x < 0$, $g(x) < 0$ και $h(x) > 0$. Άρα η $g(x) = h(x)$ είναι αδύνατη.

Για $x = 0$, $g(0) = 0$ και $h(0) = 1$. Άρα $g(x) \neq h(x)$.

Για $x > 0$:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x \cdot e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1) \cdot (\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1) \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow \ln x - x = \ln x_0 \cdot (x+1) - x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0 (x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Από Δ έχω μοναδική ρίζα x_0 .

Άρα έχω μοναδικό κοινό σημείο.

$$g'(x) = (x)'e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 \cdot e^{-x_0} = e^{-x_0} (1 - x_0) = \frac{1 - x_0}{e^{x_0}}$$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \cdot (x+1)' = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow h'(x_0) &= \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1) = \\
 &= \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot (\ln x_0 - 1)
 \end{aligned}$$

Αφού οι δύο εφαπτόμενες των συναρτήσεων διέρχονται από το κοινό τους σημείο, πρέπει και

$$\text{αρκεί } g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e \cdot e^{x_0}} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow \frac{\ln x_0 - 1}{x_0} = \frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow e(1-x_0) = x_0^{x_0} \cdot x_0 \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(1-x_0) = x_0^{x_0} \cdot x_0 \frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow e(1-x_0) = x_0^{x_0} \cdot (1-x_0) \Leftrightarrow \begin{matrix} (1-x_0) \neq 0, \text{ αφού } x_0 \in (1, e) \\ e = x_0^{x_0} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln e = \ln x_0^{x_0} \Leftrightarrow 1 = x_0 \cdot \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

που ισχύει από Δ1

Δ4.

$$A(x, f(x)), \quad B(x, \varphi(x))$$

$$\begin{aligned}
 (AB) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (\varphi(x) - f(x))^2} = \\
 &= \sqrt{(\varphi(x) - f(x))^2} = |\varphi(x) - f(x)| \stackrel{f(x) > \varphi(x)}{=} f(x) - \varphi(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = f(x) - \varphi(x)$$

Έστω ότι η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Έστω ότι η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Αφού έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 στο οποίο η h είναι παρ/μη από θεώρημα Fermat $h'(x_0) = 0$.

$$\text{Έχω } h'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) \text{ οπότε } h'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

Από Δ2 η f έχει ελάχιστο στο x_0 με $f'(x_0) = 0$

Άρα $\varphi'(x_0) = 0$ δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .