ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

ΝΟΥΣ ΟΜΙΛΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ	ΟΝ/ΜΟ			
	ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		
	ΤΑΞΗ	Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ		
	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	18/04/21	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	ΩΡΕΣ

ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 32.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104.

Α3.
1. ΨΕΥΔΗΣ
2. σχολικό βιβλίο σελίδα 134

Α4. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144.

Α5.
1. Λ
2. Λ
3. Λ
4. Λ
5. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ως ρητή.

Είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=\frac{(x^2-x+4)'(x-1)-(x^2-x+4)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+4)}{(x-1)^2}=$$

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$.

Το πρόσημο της f' η μονοτονία της f και τα ακρότατα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-3 T.M.	$\searrow$	‖	$\searrow$	5 T.E.	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,3]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$

Επομένως:

η f παρουσιάζει στο $x_1=-1$, τοπικό μέγιστο το $f(-1)=-3$.

η f παρουσιάζει στο $x_2=3$, τοπικό ελάχιστο το $f(3)=5$.

Β2.Επίσης

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x+3)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{8}{(x-1)^3}$$

Παρατηρούμε ότι η $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 1$. Το πρόσημο της f'' δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$\frown$	‖	$\smile$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$. Η f δεν έχει σημείο καμπής διότι το $1\notin D_f$.

Β3. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}\cdot(x^2-x+4)\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot(x^2-x+4)\right)=+\infty$

Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2-x+4}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)=0=\beta$$

Επομένως η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Εξετάζουμε την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης της C_f στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^2-x+4}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1=\lambda$$

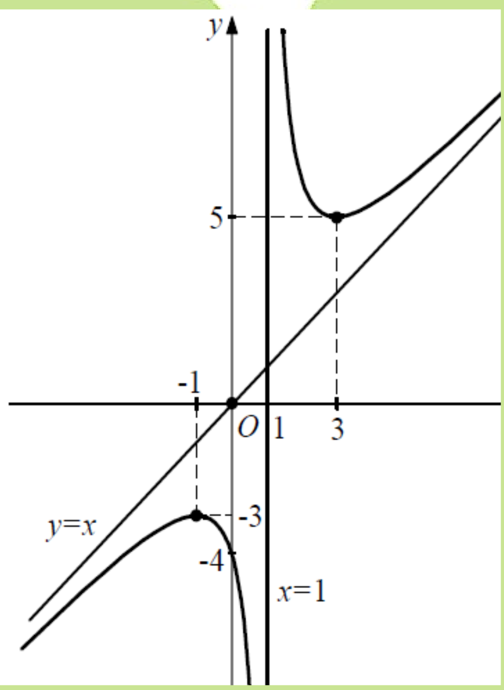
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+4-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)=0=\beta$$

Επομένως η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

B4. Ο πίνακας μεταβολής της f είναι :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\boxed{-3}$ T.M.		$-\infty$ ‖ $+\infty$		$\boxed{5}$ T.E.		$+\infty$

Η γραφική παράσταση της f είναι :



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση d θα έχει τύπο: $d(x)=e^x-\ln x$

και πεδίο ορισμού: $A_d=A_f\cap A_g=(0,+\infty)$

Η d είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων (εκθετική, πολυωνυμική)

$d'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$

$d''(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$ άρα η $d'\nearrow$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα του λ. $x_o\in(0,+\infty)$ στο οποίο μηδενίζεται η d'

[**τρόπος α** – με σύνολο τιμών d']

$d'((0,+\infty))\overset{d'\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to0^+}d'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}d'(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ και d' συνεχής

$0\in\mathbb{R}$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $d'(x_o)=0$ και επειδή η $d'\nearrow$ θα είναι μοναδικό.

[**τρόπος β** – με Bolzano σε «ανοικτό διάστημα»]

$\lim\limits_{x\to0^+}d'(x)=-\infty$ άρα θα υπάρχει ένα $\alpha>0$ τέτοιο ώστε $d'(\alpha)<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}d'(x)=+\infty$ άρα θα υπάρχει ένα $\beta>\alpha$ τέτοιο ώστε $d'(\beta)>0$

d' συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

$d'(\alpha)\cdot d'(\beta)<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)\subseteq(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $d'(x_o)=0$ και επειδή η $d'\nearrow$ θα είναι μοναδικό.

[**τρόπος γ** – με Bolzano σε δικό μας υποσύνολο του $(0,+\infty)$]

$d'(1)=e-1>0$

$d'\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-2=\sqrt{e}-\sqrt{4}<0$

Άρα έχουμε d' συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ και $d'\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot d'(1)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\subseteq(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $d'(x_o)=0$ και επειδή η $d'\nearrow$ θα είναι μοναδικό.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$ 0	x_o	$+\infty$
$d'(x)$		$-$	$+$
d		$\searrow$	$\nearrow$
		ΟΕ	

Άρα υπάρχει x_o στο οποίο η d έχει μοναδικό ολικό ελάχιστο.

Γ2. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο οπότε το εμβαδόν του θα δίνεται από τον τύπο:

$E=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\frac{|x|\cdot|g(x)|}{2}=\frac{1}{2}x\ln x$ αφού $x>1\Leftrightarrow \ln x>0$

Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση του εμβαδού ως προς το χρόνο t:

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\ln x(t)$$

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left[\ln x(t)+1\right]\cdot x'(t)\overset{t=t_o}{\Leftrightarrow}$$

$$E'(t_o)=\frac{1}{2}\left[\ln x(t_o)+1\right]\cdot x'(t_o)$$

Από τα δεδομένα της άσκησης γνωρίζουμε ότι $x(t_o)=5$ cm και

$x'(t_o)=4$ cm/sec

Άρα: $E'(t_o)=\frac{1}{2}(\ln 5+1)\cdot 4=2\ln 5+2$ cm^2/sec

Γ3. $f(x)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)<f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x^2)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)<f(x^2)-f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **(1)**

Θεωρούμε $h(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=e^x-e^{\frac{1}{x}}$, με $D_h=(0,+\infty)$

$$h'(x)=e^x-e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^x+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Άρα h $\nearrow$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται ισοδύναμα:

$$h(x)<h(x^2)\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}x<x^2\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1<x$$

Άρα $x\in(1,+\infty)$

Γ4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-2^x+1}{f(x+1)-5^x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-2^x+1}{e^{x+1}-5^x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{5^x}\cdot\left[\left(\frac{e}{5}\right)^x-\left(\frac{2}{5}\right)^x+\frac{1}{5^x}\right]}{\cancel{5^x}\cdot\left[e\left(\frac{e}{5}\right)^x-1-\frac{2}{5^x}\right]}=\frac{0-0+0}{e\cdot 0-1-0}=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f''(x)=e^{-x}-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow f''(x)=\left(-e^{-x}+\frac{1}{x}\right)'$

άρα από ΣΘΜΤ στο διάστημα $(0,+\infty)$ θα υπάρχει ένα $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$f'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{x}+c$

Η γραφική παράσταση της f' έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x'x, άρα θα ισχύει ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}+\frac{1}{x}+c\right)=0\Leftrightarrow-0+0+c=0\Leftrightarrow c=0$

Άρα $f'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{x}$

Δ2. $f'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(e^{-x}+\ln x\right)'$ άρα από ΣΘΜΤ στο διάστημα $(0,+\infty)$ θα υπάρχει ένα $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=e^{-x}+\ln x+c$ και από τα δεδομένα, $f(1)+f(e)=1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^e}$

Για $x=1$ έχουμε $f(1)=e^{-1}+\ln1+c\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{e}+c$

Για $x=e$ έχουμε $f(e)=e^{-e}+\ln e+c\Leftrightarrow f(e)=\frac{1}{e^e}+1+c$

Με πρόσθεση κατά μέλη λοιπόν έχουμε:

$\cancel{f(1)+f(e)}=\cancel{1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^e}}+2c\Leftrightarrow c=0$

Άρα $f(x)=e^{-x}+\ln x$

Δ3. Έχουμε $f'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{x}=\frac{e^x-x}{x\cdot e^x}>0$ αφού

$e^x\geq x+1\Rightarrow e^x>x\Rightarrow e^x-x>0$, άρα $f\nearrow$

Έχουμε $f''(x)=e^{-x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-e^x}{e^x\cdot x^2}$

Θεωρούμε $g(x)=x^2-e^x$ με $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=2x-e^x$ και $g''(x)=2-e^x$

x	$-\infty$ ln2	$+\infty$
$g''(x)$	+	−
g'	$\nearrow$	$\searrow$
	O.M.	

$g'(\ln 2)=2\ln 2-2=2\cdot(\ln 2-1)<0$ ολικό μέγιστο της g' άρα

$g'(x)\le g'(\ln 2)<0$

Άρα $g\searrow$, οπότε για $x>0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)\Leftrightarrow g(x)<-1$άρα $f''(x)<0$

οπότε $g\frown$

Δ4. i. Για $x>0$ έχουμε:

Η f είναι συνεχής στο $[x,2x]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$

Άρα από ΘΜΤ θα υπάρχει ένα $\xi\in(x,2x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$$

Άρα

$$x<\xi<2x\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>\boxed{f'(\xi)>f'(2x)}\Rightarrow\frac{f(2x)-f(x)}{x}>f'(2x)\Rightarrow f(2x)-f(x)>x\cdot f'(2x)$$

ii. Έχουμε

$$h'(x)=\frac{\left[2f'(2x)-f'(x)\right]\cdot x-f(2x)+f(x)}{x^2}=\frac{2xf'(2x)-xf'(x)-f(2x)+f(x)}{x^2}=$$

$$=\frac{xf'(2x)-xf'(x)+xf'(2x)-f(2x)+f(x)}{x^2}=\frac{x\cdot\left[f'(2x)-f'(x)\right]+xf'(2x)-f(2x)+f(x)}{x^2}<0$$

Αφού για $x>0$ ισχύει:

$2x>x\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(2x)<f'(x)\Rightarrow f'(2x)-f'(x)<0$ και

$f(2x)-f(x)>x\cdot f'(2x)$ από ερώτημα Δ4 i

Άρα $h\searrow$.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ