	ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ		
ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ		
ΤΑΞΗ	Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ		
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	17/05/2020	**ΔΙΑΡΚΕΙΑ**	3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 142 – 143.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 33.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 94.

Α4. **α.** Ψ

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 62.

Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Α5. α – Σ , β – Σ , γ – Σ , δ – Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η f πρέπει: $x \in A_h$ και $h(x) \in A_g$. Δηλαδή πρέπει:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \text{και} \\ \dfrac{2-x}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{και} \\ (2-x)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{και} \\ 1 < x < 2 \end{cases}. \text{ Άρα } A_f = (1,2).$$

Ο τύπος της f είναι: $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right)$.

Β2. Για κάθε $x \in (1,2)$ έχουμε: $f'(x) = -\dfrac{1}{(2-x)(x-1)} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f\left((1,2)\right) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x)\,,\, \lim_{x\to 1^+} f(x)\right).$$

Έστω $u = \dfrac{2-x}{x-1}$

- $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} u = \lim_{x\to 1^+} \frac{2-x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Άρα $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right) = \lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$.

- $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} u = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{x-1} = \frac{0}{1} = 0$

Άρα $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$.

Άρα $f\left((1,2)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Β3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,2)$, άρα είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Για κάθε $x \in (1,2)$ και $y \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Επομένως:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{2-x}{x-1} = e^y \Leftrightarrow 2-x = e^y(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{e^y+2}{e^y+1}\,,\ y \in \mathbb{R}.$$

Άρα $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y+2}{e^y+1}$, $y \in \mathbb{R}$ ή $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

➤ $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1} = \frac{0+2}{0+1} =$

Β4. $f^{-1}(x) = x^3 \Leftrightarrow \dfrac{e^x+2}{e^x+1} - x^3 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x+1} - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $w(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,2)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $w'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} - 3x^2 = -\left(\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} + 3x^2\right) < 0$. Άρα η w είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και $1-1$.

- $w(1) = \dfrac{e+2}{e+1} - 1 = \dfrac{1}{e+1} > 0$
- $w(2) = \dfrac{e^2+2}{e^2+1} - 8 = \dfrac{-e^2-6}{e^2+1} = -\dfrac{e^2+6}{e^2+1} < 0$

Οπότε $w(1)\cdot w(2) < 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $w(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Επειδή η w είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$, η ρίζα αυτή είναι η μοναδική που έχει.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x < x+1 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$.
Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η παράσταση $f(x) - f(x+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως έκφραση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως $g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(f(x+1) - f(x)\right)' = f'(x+1) - f'(x)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x < x+1 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x+1) - f'(x) < 0 \Leftrightarrow g''(x) < 0$.

Άρα η συνάρτηση g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και $1-1$.

Γ3. $f(2\sigma\upsilon\nu x + 1) + f(2 - x^2) = f(2\sigma\upsilon\nu x) + f(3 - x^2) \Leftrightarrow$

$f(2\sigma\upsilon\nu x + 1) - f(2\sigma\upsilon\nu x) = f(3 - x^2) - f(2 - x^2) \Leftrightarrow g'(2\sigma\upsilon\nu x) = g'(2 - x^2) \overset{g':1-1}{\Leftrightarrow}$

$2\sigma\upsilon\nu x = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x + x^2 - 2 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h(0) = 2\sigma\upsilon\nu 0 + 0^2 - 2 = 0$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x + x^2 - 2 = 0$ έχει προφανή ρίζα τη $x = 0$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = -2\eta\mu x + 2x$ και $h''(x) = -2\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2(1 - \sigma\upsilon\nu x) \geq 0$. Η ισότητα στη σχέση ισχύει για κάποια μεμονωμένα x τα οποία δε σχηματίζουν διάστημα, οπότε η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- $x < 0 \overset{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) < h'(0) \Leftrightarrow h'(x) < 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- $x > 0 \overset{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Οπότε η h έχει ελάχιστο το $h(0) = 0$. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x + x^2 - 2 = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$.

Συνεπώς και η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$.

Γ4. $\dfrac{g'(x)}{x} = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x}$ (1)

Για την f ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, x+1]$, άρα υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$ (2)

Είναι $x < \xi < x+1 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f'(x+1) < f(x+1) - f(x) < f'(x)$. Για $x < 0$ έχουμε: $\dfrac{f'(x+1)}{x} > \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x} > \dfrac{f'(x)}{x} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{f'(x)}{x} < \dfrac{g'(x)}{x} < \dfrac{f'(x+1)}{x}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f'(x)}{x} = 2020$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f'(x+1)}{x} \underset{u \to -\infty}{\overset{u=x+1}{=}} \lim\limits_{u \to -\infty} \dfrac{f'(u)}{u-1} = \lim\limits_{u \to -\infty} \left(\dfrac{f'(u)}{u} \cdot \dfrac{u}{u-1}\right) = \lim\limits_{u \to -\infty} \dfrac{f'(u)}{u} \cdot \lim\limits_{u \to -\infty} \dfrac{u}{u-1} =$

$\lim\limits_{u \to -\infty} \dfrac{f'(u)}{u} \cdot \lim\limits_{u \to -\infty} \dfrac{u}{u} = 2020 \cdot 1 = 2020$.

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g'(x)}{x} = 2020$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i) Για $x<2$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f' είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $\frac{-4-0}{2-0}=-2$, άρα $f'(x)=-2x \Leftrightarrow f'(x)=\left(-x^2\right)'$ και επειδή οι συναρτήσεις f και $-x^2$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(-\infty,2]$ τότε από συνέπειες Θ.Μ.Τ υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)=-x^2+c_1$, $x\le 2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστο τον αριθμό 4 αφού $f(x)\le 4$ και είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού στο διάστημα $(-\infty,2)$, επομένως ισχύει ότι $f(0)=4 \Leftrightarrow -0^2+c_1=4 \Leftrightarrow c_1=4$. Άρα $f(x)=-x^2+4$, $x\le 2$.

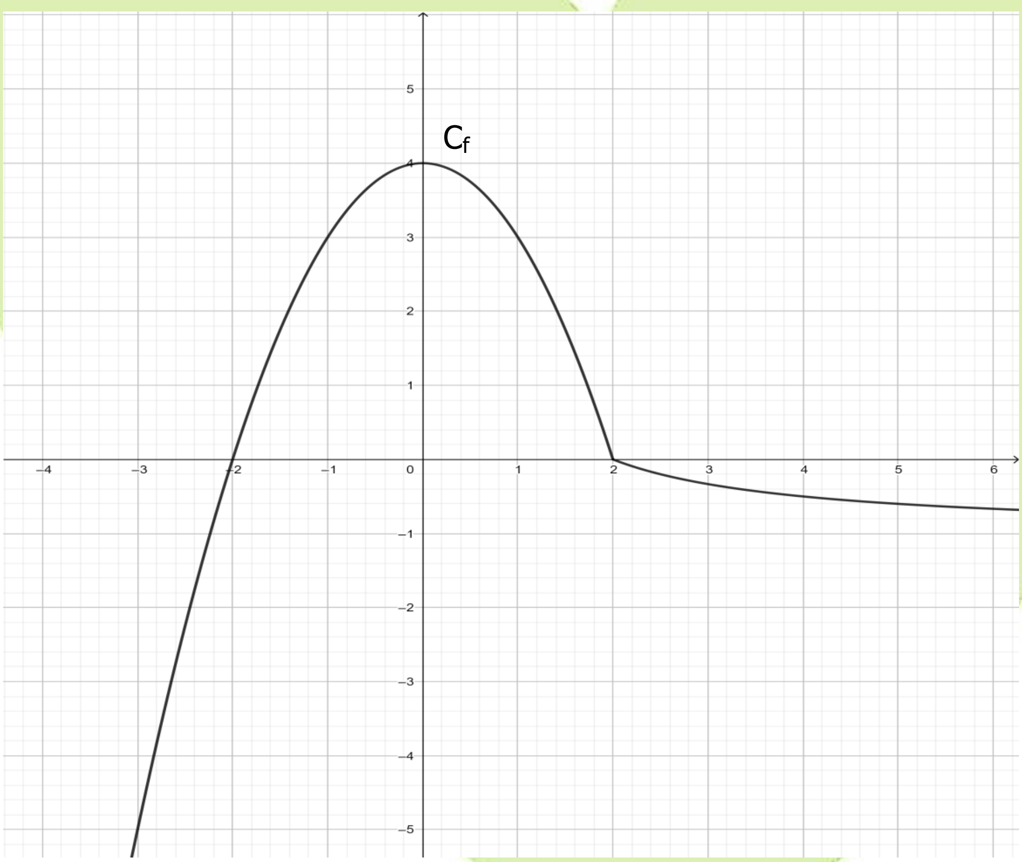
Για $x>2$ έχουμε $f'(x)=-\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'$ κι αφού οι συναρτήσεις f και $\frac{2}{x}$ είναι συνεχείς στο $(2,+\infty)$ υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)=\frac{2}{x}+c_2$, $x>2$.

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής και στο 2 , οπότε

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4-2^2=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{2}{x}+c_2\right) \Rightarrow 0=\frac{2}{2}+c_2 \Rightarrow c_2+1=0 \Rightarrow c_2=-1 .$$

Άρα $f(x)=\frac{2}{x}-1$, $x>1$. Επομένως $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & , x\le 2 \\ \frac{2}{x}-1 & , x>2 \end{cases}$.

ii)



Δ2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f σε κάθε σημείο της $(x, f(x))$ είναι $\lambda = f'(x)$, $x \neq 2$. Από τη γραφική παράσταση της παραγώγου f' διαπιστώνουμε ότι η $f' \downarrow$ στο $(-\infty, 2)$ και $f' \uparrow$ στο $(2, +\infty)$ αλλά επειδή η f' δεν ορίζεται στο $x = 2$ τότε η f' δεν παρουσιάζει ελάχιστο . Συνεπώς αποδείξαμε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f όπου η εφαπτομένη να έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Δ3. Είναι $f'(x) = \begin{cases} -2x \ , \ x < 2 \\ -\dfrac{2}{x^2} \ , \ x > 2 \end{cases}$.

• Θεωρούμε ένα σημείο $M(x_1, f(x_1))$ με $x_1 < 2$ της C_f. Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο της $M(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση $\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - (4 - x_1^2) = -2x_1(x - x_1) \Leftrightarrow$

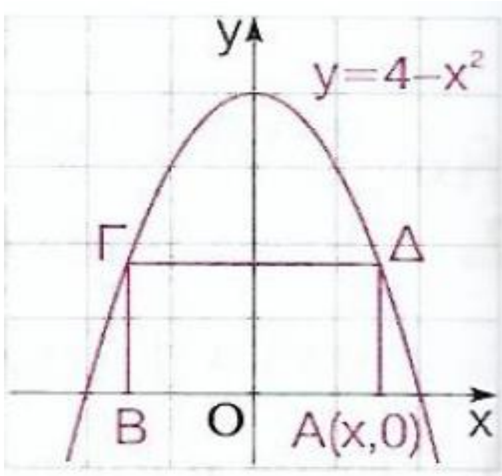
$\Leftrightarrow y - 4 + x_1^2 = -2x_1x + 2x_1^2 \Leftrightarrow y = -2x_1x + x_1^2 + 4$ (1). Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $0 = -2x_1 \cdot 0 + 0^2 + 4 \Leftrightarrow 0 = 4$, άτοπο . Επομένως δεν υπάρχει σημείο $M(x_1, f(x_1))$ με $x_1 < 2$ της C_f για το οποίο η εφαπτομένη σ' αυτό να διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

• Θεωρούμε ένα σημείο $N(x_2, f(x_2))$ με $x_2 > 2$ της C_f. Η εφαπτομένη ε_2 της C_f στο σημείο της $N(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση $\varepsilon_2 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y - \left(\dfrac{2}{x_2} - 1\right) = -\dfrac{2}{x_2^2}(x - x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - \dfrac{2}{x_2} + 1 = -\dfrac{2}{x_2^2}x + \dfrac{2}{x_2} \Leftrightarrow y = -\dfrac{2}{x_2^2}x + \dfrac{4}{x_2} - 1$ (2). Η ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $0 = -\dfrac{2}{x_2^2} \cdot 0 + \dfrac{4}{x_2} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_2 = 4$.Επομένως υπάρχει σημείο $N(x_2, f(x_2)) \equiv N(4, f(4))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων . Η εξίσωσή της είναι $\varepsilon_2 : y = -\dfrac{2}{4^2}x + \dfrac{4}{4} - 1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{2}{16}x \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{8}x$.

Δ4. Λόγω συμμετρίας της C_f ως προς τον άξονα y΄y έχουμε $B(-x,0)$. Είναι $\Delta(x,4-x^2)$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=(AB)\cdot(A\Delta)\Rightarrow E(x)=2x\cdot(4-x^2)\Rightarrow$

$\Rightarrow E(x)=-2x^3+8x$, $x\in(0,2)$.



Έχουμε $E'(x)=-6x^2+8$, $0<x<2$.

Είναι $E'(x)=0\Leftrightarrow -6x^2+8=0\Leftrightarrow 6x^2=8\Leftrightarrow x^2=\frac{8}{6}\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\overset{0<x<2}{\Leftrightarrow} x=\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

x	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$E'(x)$	$+$	0	$-$
$E(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Τότε οι συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου είναι

$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right), B\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right), \Gamma\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{8}{3}\right), \Delta\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{8}{3}\right)$

αφού $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=4-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=4-\frac{12}{9}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.