

ΝΟΥΣ ΟΜΙΛΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025

	ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ			
	ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ		
	ΤΑΞΗ	Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ		
	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	13/04/2025	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 144.

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 51.

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 157.

A4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος .

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $u = -x \Leftrightarrow x = -u$, $u \in \mathbb{R}$ οπότε $f(u) = \frac{-u}{(-u)^2 + 1} = -\frac{u}{u^2 + 1}$, $u \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B2.i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με :

$$f'(x) = -\frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f					
		T.M.		T.E.	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα $[-1, 1]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -1$, το $f(-1) = -\frac{(-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$ και τοπικό

ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -\frac{1}{1^2 + 1} = -\frac{1}{2}$.

ii) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2-1)' \cdot (x^2+1)^2 - (x^2-1) \cdot [(x^2+1)^2]'}{[(x^2+1)^2]^2} = \frac{2x \cdot (x^2+1)^2 - (x^2-1) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{2x \cdot (x^2+1)^2 - 4x \cdot (x^2-1) \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x \cdot \cancel{(x^2+1)} \cdot [(x^2+1) - 2(x^2-1)]}{(x^2+1)^{43}} = \frac{2x \cdot (x^2+1-2x^2+2)}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{2x \cdot (3-x^2)}{(x^2+1)^3}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x \cdot (3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (3-x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ή } 3-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$		
$2x$	-	-	0	+	+		
$3-x^2$	-	0	+	+	0	-	
f''	+	0	-	0	+	0	-
f							
		$\Sigma.K.$	$\Sigma.K.$	$\Sigma.K.$			

Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{3}]$ και $[0, \sqrt{3}]$ και κοίλη στα διαστήματα $[-\sqrt{3}, 0]$ και $[\sqrt{3}, +\infty)$. Η f παρουσιάζει καμπή στα $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. Τα σημεία καμπής της C_f είναι

$$\text{τα } A\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), O(0,0) \text{ και } B\left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ αφού } f(-\sqrt{3}) = -\frac{(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$f(0) = -\frac{0}{0^2+1} = 0 \text{ και } f(\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+1} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

B3. Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\text{Στο } -\infty \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{\cancel{x}}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

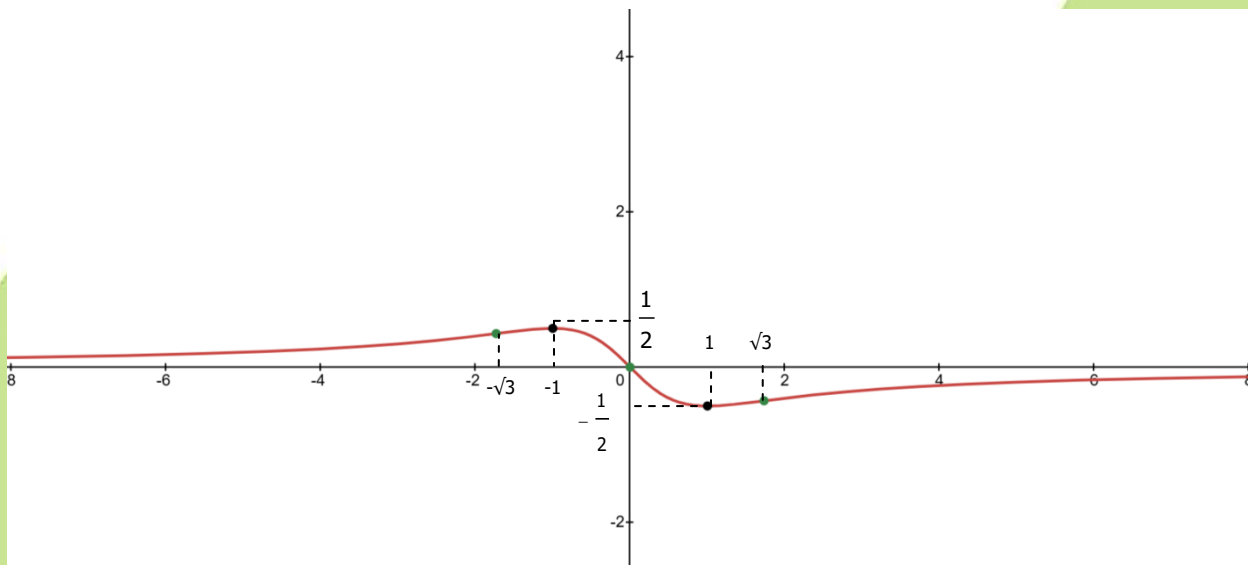
Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ στο $-\infty$.

Στο $+\infty$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ και στο $+\infty$.

B4. i)

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	+	+	0	-	-	0	+
f''	+	0	-	-	0	+	+
f	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	0



ii) • Αν $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Αν $a = -\frac{1}{2}$ ή $a = 0$ ή $a = \frac{1}{2}$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

• Αν $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{1}{2} \right)$, η εξίσωση έχει ακριβώς 2 λύσεις.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι συνεχής και στο 0. Επομένως ισχύει ότι : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\eta\mu x + a) = \eta\mu 0 + a = a$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\beta x - x\sqrt{x}) = \beta \cdot 0 - 0 \cdot \sqrt{0} = 0$ και $f(0) = \eta\mu 0 + a = a$. Άρα $a = 0$.

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = \frac{4}{9}$ που είναι εσωτερικό σημείο του D_f και η f είναι

παραγωγίσιμη για $x > 0$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x) = (\beta x - x\sqrt{x})' = (\beta x - x \cdot x^{\frac{1}{2}})' =$

$$= (\beta x - x^{\frac{3}{2}})' = \beta - \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \beta - \frac{3}{2} \sqrt{x}, \text{ τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα ισχύει :}$$

$$f'\left(\frac{4}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \beta - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}} = 0 \Leftrightarrow \beta - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Γ2. Για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x & , -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ x - x\sqrt{x} & , x > 0 \end{cases}.$

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} \sigma \upsilon \nu x & , -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1 - \frac{3}{2} \sqrt{x} & , x > 0 \end{cases}.$$

→ Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ τότε $f'(x) = \sigma \upsilon \nu x > 0$.

→ Αν $x > 0$ τότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{2} \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$, δεκτή.

→ Για $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{3}{2} \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{9}$ και

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{3}{2} \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \frac{4}{9}.$$

Το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{4}{9}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-
$f(x)$				

Τ.Ε.

Μέγιστο

Επειδή $f'(x) > 0$ για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{4}{9}\right)$ και η f είναι συνεχής στο 0 , η f είναι γνησίως αύξουσα

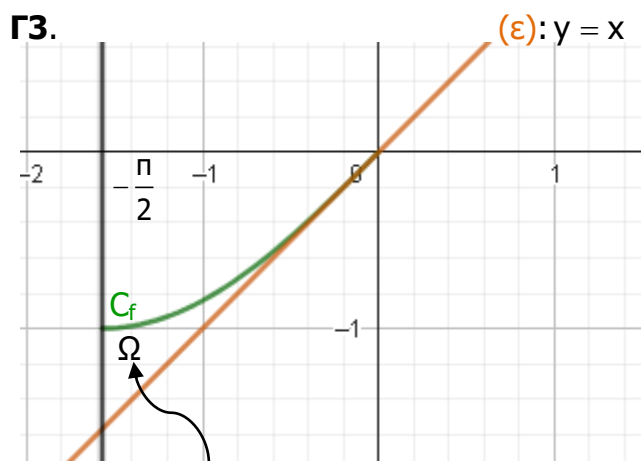
στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{4}{9}\right]$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $-\frac{\pi}{2}$, το $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \eta \mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

και (ολικό) μέγιστο στο $\frac{4}{9}$, το $f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{12}{27} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}.$

Στο σημείο αλλαγής τύπου $x_1 = 0$ έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{x}) = 1. \text{ Άρα } f'(0) = 1.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 0$ είναι $(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$.



$$x = -\frac{\pi}{2}$$

Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε τη **γραφική παράσταση της f** για $x < 0$ μαζί με την **εφαπτομένη της (ε)** και την κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\pi}{2}$. Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$ για κάθε

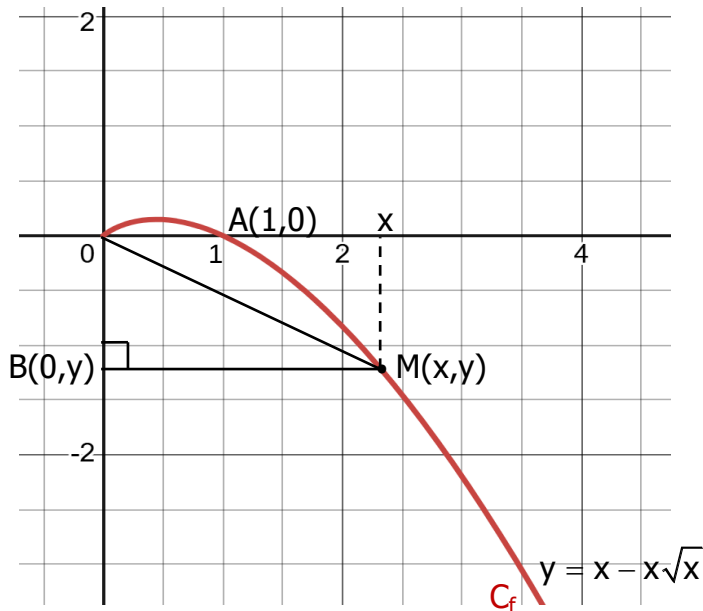
$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Συνεπώς το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη από τη γραφική

παράσταση της f , την ευθεία (ε) και την ευθεία $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι $E(\Omega) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (f(x) - x) dx =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\eta\mu x - x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \eta\mu x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\sigma\upsilon\nu 0 - \left[\underbrace{-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_0 \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} \right] =$$

$$= -1 - \left(-\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} \right) = -1 + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1 \text{ τ.μ.}$$

Γ4.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Έστω $M(x, y)$, $x \geq 1$, οι συντεταγμένες του κινητού σημείου M . Τη χρονική στιγμή t είναι $x = x(t)$, $y = y(t)$ όπου $x(t) \geq 1$ και $t \geq 0$. Αφού η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{1}{3}$ cm/sec, ισχύει $x'(t) = \frac{1}{3}$. Επειδή το σημείο B είναι η προβολή του σημείου

$M(x, y)$ στον άξονα $y'y$ τότε οι συντεταγμένες του είναι $B(0, y)$. Το εμβαδόν του τριγώνου OMB

$$\text{είναι } E = (OMB) = \frac{1}{2} \cdot (OB) \cdot (BM) = \frac{1}{2} \cdot |y| \cdot |x| = \frac{1}{2} \cdot (-y) \cdot x = -\frac{1}{2} xy \quad y = x - x\sqrt{x}$$

$$= -\frac{1}{2} x(x - x\sqrt{x}) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} x^2, \text{ αφού } y < 0 \text{ και } x > 0. \text{ Επομένως τη χρονική}$$

$$\text{στιγμή } t \text{ είναι } E(t) = \frac{1}{2} x^{\frac{5}{2}}(t) - \frac{1}{2} x^2(t) \Rightarrow (E(t))' = \left[\frac{1}{2} x^{\frac{5}{2}}(t) - \frac{1}{2} x^2(t) \right]' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}(t) \cdot x'(t) - \frac{1}{2} \cdot 2x(t) \cdot x'(t) \Rightarrow E'(t) = \frac{5}{4} x^{\frac{3}{2}}(t) \cdot x'(t) - x(t) \cdot x'(t) \quad (1).$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο με τετμημένη 4.

Τότε ισχύει ότι $x(t_0) = 4$ και $x'(t_0) = \frac{1}{3}$. Για $t = t_0$ από την (1) προκύπτει ότι

$$E'(t_0) = \frac{5}{4} x^{\frac{3}{2}}(t_0) \cdot x'(t_0) - x(t_0) \cdot x'(t_0) = \frac{5}{4} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{4^3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{64} \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{12} - \frac{16}{12} = \frac{24}{12} = 2 \text{ cm}^2 / \text{sec}. \text{ Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου } OMB \text{ αυξάνεται με}$$

ρυθμό $2 \text{ cm}^2 / \text{sec}$ τη χρονική στιγμή που το σημείο M διέρχεται από το σημείο με τετμημένη 4.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = (e^x + x)' = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα. Επιπλέον η g είναι συνεχής στο $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ με $g(-1) = e^{-1} + (-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ και $g\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt{e}}{2\sqrt{e}} > 0$. Άρα $g(-1) \cdot g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$, το οποίο είναι και μοναδικό αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Η συνάρτηση $h = f \circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$.

$$\begin{cases} x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ και} \\ g(x) \in D_f \Leftrightarrow g(x) \in (0, +\infty) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(x_0) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x > x_0 \Leftrightarrow x > x_0. \end{cases}$$

$g(x_0) = 0$ από Δ1.i)

Άρα $D_h = D_{f \circ g} = (x_0, +\infty)$ και ο τύπος της συνάρτησης $h = f \circ g$ είναι :

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x + x) = \ln(e^x + x), \quad x \in (x_0, +\infty).$$

Δ2. i) $h(x) = \ln(e^x + x), \quad x \in (x_0, +\infty)$.

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \ln(e^x + x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$, επειδή αν θέσουμε $u = e^x + x$ είναι

$u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (e^x + x) = e^{x_0} + x_0 = 0$ καθώς $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 = 0$ από **Δ1.i)** και $u > 0$ για

$x > x_0$. Συνεπώς η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h .

Πλάγια – οριζόντια σύμπτωτη στο $+\infty$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(e^x + x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1, \text{ άρα } \lambda = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + x) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x + x}{e^x} = \\
& = \lim_{y \rightarrow 1} \ln y = \ln 1 = 0, \text{ επειδή αν θέσουμε } y = \frac{e^x + x}{e^x} \text{ είναι } y_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x} \stackrel{+ \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + x)'}{(e^x)'} = \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x} \stackrel{+ \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1. \text{ Άρα } \beta = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ είναι πλάγια σύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

ii) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ δεν είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$. Συνεπώς η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ είναι κοινή ασύμπτωτη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων h και g .

Δ3. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^{\varphi^2(x)} + \varphi'(x) = e^{-\varphi'(x)} - \varphi^2(x) \Leftrightarrow e^{\varphi^2(x)} + \varphi^2(x) = e^{-\varphi'(x)} - \varphi'(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(\varphi^2(x)) = g(-\varphi'(x)) \stackrel{g \uparrow \text{ άρα } 1-1}{\Leftrightarrow} \varphi^2(x) = -\varphi'(x) \stackrel{\varphi^2(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)' = (x)'.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{1}{\varphi(x)}$ και x είναι συνεχείς στο $(0, +\infty)$ σύμφωνα με το πόρισμα των

συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{\varphi(x)} = x + c, x > 0$ (1).

Για $x = 1$ από την (1) έχουμε: $\frac{1}{\varphi(1)} = 1 + c \Leftrightarrow \frac{1}{1} = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$. Για $c = 0$ από την

(1) προκύπτει ότι $\frac{1}{\varphi(x)} = x \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{x}, x > 0$.

Δ4. Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την ευθεία

$(\varepsilon): y = x$, την ευθεία $x = x_0$ και τον άξονα $y'y$ είναι: $E = \int_{x_0}^0 |g(x) - x| dx = \int_{x_0}^0 |e^x + x - x| dx =$

$= \int_{x_0}^0 |e^x| dx \stackrel{e^x > 0}{=} \int_{x_0}^0 e^x dx = [e^x]_{x_0}^0 = e^0 - e^{x_0} = 1 - (-x_0) = 1 + x_0$ τ.μ.(2), καθώς από **Δ1.i)** ισχύει

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = -x_0$. Επιπλέον από **Δ1.i)** γνωρίζουμε ότι $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 < x_0 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 1 < 1 + x_0 < 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 1 + x_0 < \frac{1}{2}$ (3).

Από (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $E < \frac{1}{2}$.