


ΝΟΥΣ ΟΜΙΛΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021**

 ΟΜΙΛΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ	ΟΝ/ΜΟ			
	ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		
	ΤΑΞΗ	Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ		
	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	18/04/21	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

**ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να δοθεί ο ορισμός του μεγίστου μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $A$ .

**Μονάδες 2**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της .

**Μονάδες 2**

**A3.** Ένας μαθητής έκανε τον εξής ισχυρισμό : «Αν για μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $\mathbb{R} - \{0\}$  ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R} - \{0\}$  .»

1. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό αν είναι ΑΛΗΘΗΣ ή ΨΕΥΔΗΣ.
2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

**Μονάδες 1+3**

**A4.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$  στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν στο  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$  τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$  .

**Μονάδες 7**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι Σωστές και με (Λ) αν είναι Λανθασμένες:

1. Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία χωρίζουν οι ρίζες της  $f$  το πεδίο ορισμού της.
2. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντα συνεχής στο  $x_0$ .

3. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$ , βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής.
4. Ισχύει ο τύπος  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
5. Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη τότε η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει το πολύ μια ρίζα.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}, x \neq 1$ .

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 8**

- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B4.** Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ . ( Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 4**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^x$  με  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = \ln x$  με  $x > 0$ .

- Γ1.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $d = f - g$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, +\infty)$  στο οποίο η  $d$  παρουσιάζει ελάχιστο.

**Μονάδες 7**

- Γ2.** Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο  $OAB$  όπου  $O$  η αρχή των αξόνων,  $A(x, 0)$  και  $B(0, g(x))$  με  $x > 1$ . Αν το  $x$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $4 \text{ cm/sec}$  τότε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E(x)$  του τριγώνου  $OAB$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία  $x = 5 \text{ cm}$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Για  $x > 0$  να λύσετε την ανίσωση  $f(x) + f\left(\frac{1}{x^2}\right) < f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x^2)$  .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2^x + 1}{f(x+1) - 5^x - 2}$  .

**Μονάδες 5**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :

- $f''(x) = e^{-x} - \frac{1}{x^2}$
- $f(1) + f(e) = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^e}$
- Η γραφική παράσταση της  $f'$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  τον άξονα  $x'x$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της παραγώγου είναι  $f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x}$  .

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι  $f(x) = e^{-x} + \ln x$  .

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη .

**Μονάδες 8**

**Δ4** Να δείξετε ότι:

i.  $f(2x) - f(x) > x \cdot f'(2x)$  για κάθε  $x > 0$  .

**Μονάδες 6**

ii. η συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$  με  $x > 0$  είναι γνησίως φθίνουσα

**Μονάδες 4**

## ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων