


ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020

 ΟΜΙΛΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ	ΟΝ/ΜΟ			
	ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ		
	ΤΑΞΗ	Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ		
	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	17/05/2020	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1 ;

Μονάδες 3

A3. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A ;

Μονάδες 3

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0. \text{ »}$$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1 – 1 τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

- γ)** Αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .
- δ)** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \ln x$ και $h(x) = \frac{2-x}{x-1}$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$. **Μονάδες 5**

Έστω $f(x) = \ln \frac{2-x}{x-1}$, $x \in (1, 2)$.

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 7**

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι :

i) $f^{-1}(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

ii) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$ **Μονάδες 3**

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μια μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

- $g'(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- οι συναρτήσεις f και f' είναι γνησίως φθίνουσες στο \mathbb{R}
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{x} = 2020$.

Γ1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . **Μονάδες 3**

Γ2. Να δείξετε ότι η g' είναι συνάρτηση 1-1. **Μονάδες 6**

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(2\sin x + 1) + f(2 - x^2) = f(2\sin x) + f(3 - x^2)$.

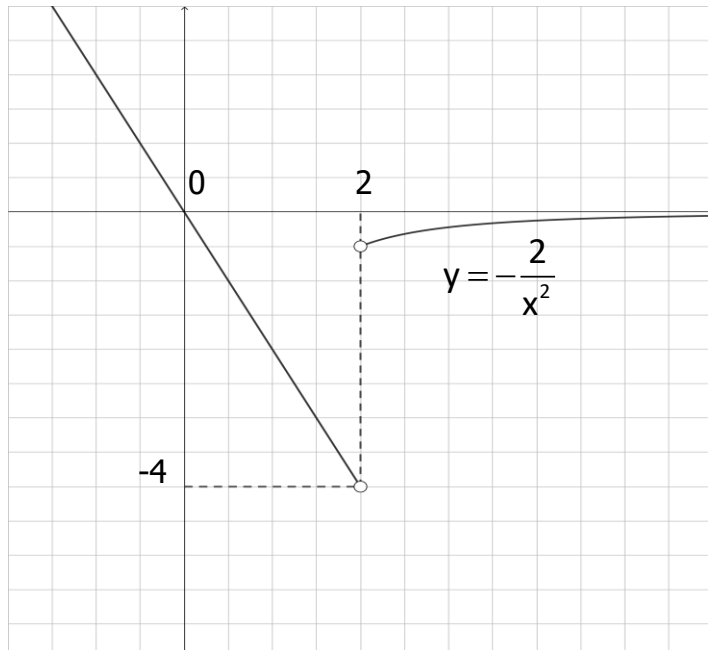
Μονάδες 8

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g'(x)}{x}$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με μέγιστη τιμή το 4.

Η γραφική παράσταση της παραγώγου της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. i) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 2 \\ \frac{2}{x} - 1, & x > 2 \end{cases}$.

Μονάδες 7

ii) Να σχεδιάσετε τη C_f .

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όπου η εφαπτομένη να έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 6

Δ4. Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου οι κορυφές Γ, Δ ανήκουν στη C_f και οι κορυφές A, B βρίσκονται στον άξονα $x'x$ όπου $A(x, 0)$ με $x \in (0, 2)$.

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου ώστε το ορθογώνιο να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων