	ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ		
ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ		
ΤΑΞΗ	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ		
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	14/4/2024	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

ΟΜΙΛΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β) να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Απάντηση

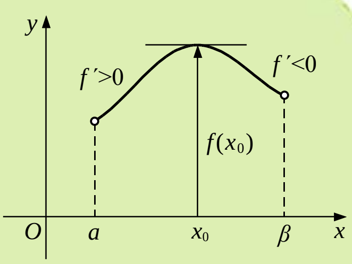
Σχολικό βιβλίο σελίδα 144

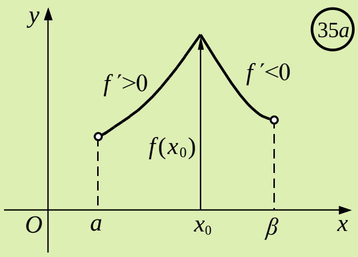
Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Σχολικό βιβλίο σελίδα 128-129

Διατύπωση

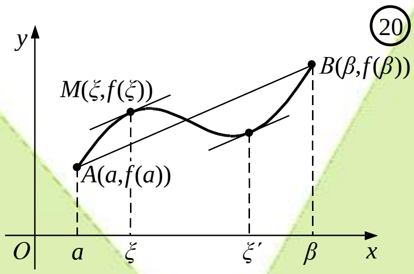
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

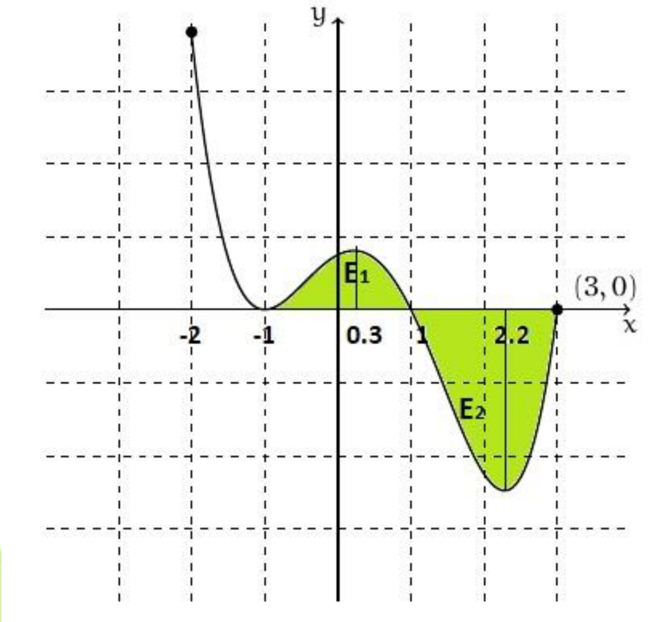
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *ΑΒ*.



Α3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f της οποίας τα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ είναι τα $(-1,0)$, $(1,0)$ και $(3,0)$. Γνωρίζουμε ότι το $E_1 = 5$ τ.μ. και $E_2 = 12$ τ.μ.. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας την σωστή απάντηση στην καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις .



i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο :

Α. [-2,-1] **Β.** [1,3]
Γ. [0.3 , 2.2] **Δ.** $[-2,-1] \cup [0.3\ ,\ 2.2]$

Η σωστή απάντηση είναι το Β

ii. Αν $I = \int_{-1}^{3} f'(x)dx$ τότε :

Α. I=12 **Β.** I=17 **Γ.** I=-7 **Δ.** I=7

Η σωστή απάντηση είναι το Γ

iii. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο :

Α. $[-1\ ,\ 0.3]$ και στο $[2.2\ ,\ 3]$ **Β.** $[-2\ ,\ -0.5]$ και στο [1,3]
Γ. [-1,1] **Δ.** [1,3]

Η σωστή απάντηση είναι το Α

iv. Αν $A = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{f'(x)}$

Α. $+\infty$ **Β.** $-\infty$ **Γ.** 0 **Δ.** Δεν υπάρχει

Η σωστή απάντηση είναι το Δ

(μονάδες 6)

Α4. Να χαρακτηρισετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε αυτό. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$
Λάθος (σχολικό βιβλίο σελίδα 136 σχόλιο)

(ii) Μία συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη, είναι και 1-1
Σωστό (σχολικό βιβλίο σελίδα 34 σχόλιο)

(iii) Αν $f'(x_o) = 0$ τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό (ή ολικό) ακρότατο της f
Λάθος (σχολικό βιβλίο σελίδα 143-144 σχόλιο)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 13}{x - 2}, x \neq 2$

Β1. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2 - 4x + 13)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 13}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 5$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 5$$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty, -1], [5, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στα [-1,2), (2,5]

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο Α(-1,-6) και τοπικό ελάχιστο στο σημείο Β(5,6)

Β2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f^2(x) = 36$

Απάντηση

Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$ οπότε

$$\left.\begin{array}{r} A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = -\infty \\ B = f(-1) = -6 \end{array}\right\} f(A_1) = (-\infty, -6]$$

Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο $A_2 = (-1, 2)$ οπότε

$$\left.\begin{array}{r} A = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -6 \\ B = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} f(A_2) = (-\infty, -6)$$

Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο $A_3 = (2, 5)$ οπότε

$$\left.\begin{array}{r} A = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \\ B = \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 6 \end{array}\right\} f(A_3) = (6, +\infty)$$

Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο $A_4 = [5, +\infty)$ οπότε

$$\left.\begin{array}{r} A = f(5) = 6 \\ B = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} f(A_4) = [6, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$.

Έχουμε $f^2(x) = 36 \Leftrightarrow f(x) = 6$ ή $f(x) = -6$

Η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει μία ακριβώς λύση καθώς:

$6 \notin f(A_1), 6 \notin f(A_2), 6 \notin f(A_3)$ οπότε δεν έχει ρίζες σε αυτά τα διαστήματα

$6 \in f(A_4)$ άρα υπάρχει μία ρίζα στο A_4 και επειδή η f2 μοναδική

Άρα συνολικά μία ακριβώς ρίζα ($x = 5$)

Η εξίσωση $f(x) = -6$ έχει μία ακριβώς λύση καθώς:

$-6 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει μία ρίζα στο A_1 και επειδή η f1 μοναδική

$-6 \notin f(A_2), -6 \notin f(A_3), -6 \notin f(A_4)$ οπότε δεν έχει ρίζες σε αυτά τα διαστήματα

Άρα συνολικά μία ακριβώς ρίζα ($x = -1$)

Η αρχική εξίσωση λοιπόν θα έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $x=5$ και $x=-1$

Β3. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

Απάντηση

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ως ρητή με

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-5)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x-5)}{(x-2)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x+10}{(x-2)^3}=\frac{18}{(x-2)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{18}{(x-2)^3}=0 \text{ αδύνατη}$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\frac{18}{(x-2)^3}>0\Leftrightarrow x-2>0\Leftrightarrow x>2$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2)$, κυρτή στο $(2,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής .

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

Απάντηση

Αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$ άρα η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+13}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x+13}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x+13-x^2+2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x+13}{x-2}\right)=-2=\beta$$

όμοια

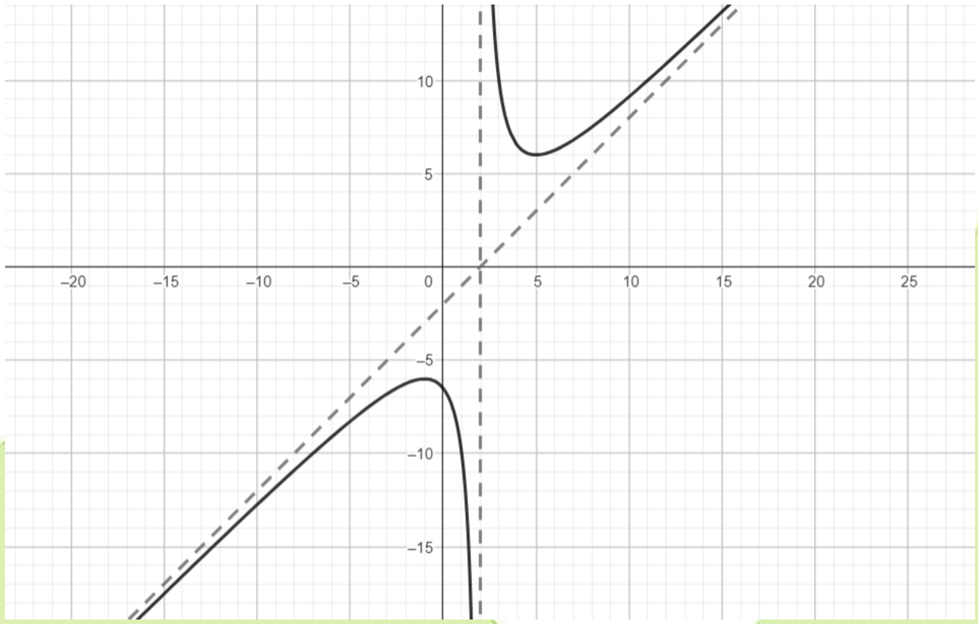
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+13}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+13}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+13}{x-2}\right)=-2=\beta$$

Οπότε η ευθεία y=x-2 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Β5. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f

Απάντηση



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x\ln x},\ x > 0$

Γ1. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

Απάντηση

$$f'(x) = e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x\ln x} \cdot (\ln x + 1)$$

Ισχύει ότι $e^{x\ln x} > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f		2	1

ΟΕ

Άρα έχουμε ότι $f1$ στο $\left[e^{-1},+\infty\right)$, $f2$ στο $\left(0,e^{-1}\right]$, $f\left(e^{-1}\right)=e^{e^{-1}\cdot\ln e^{-1}}=e^{-e^{-1}}=e^{-\frac{1}{e}}$ ολικό ελάχιστο.

$$f''(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'\cdot(\ln x+1)+e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)^2+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}=$$

$e^{x\ln x}\cdot\left[(\ln x+1)^2+\dfrac{1}{x}\right]>0$ για κάθε $x>0$ άρα η $f3$ στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Γ2. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>27$

Απάντηση

Έστω $A_1=\left(0,e^{-1}\right]$ και $A_2=\left(e^{-1},+\infty\right)$

$f\left(A_1\right)\overset{f2}{=}\left[f\left(e^{-1}\right),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\left[e^{-\frac{1}{e}},1\right)$ αφού $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$ αφού:

Θέτω $u=x\ln x$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0 \quad \text{άρα } u\to0$$

$f\left(A_2\right)\overset{f1}{=}\left(\lim\limits_{x\to e^{-1}}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(e^{-\frac{1}{e}},+\infty\right)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln x}=+\infty$ αφού:

Θέτω $u=x\ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ άρα $u\to+\infty$

Στο διάστημα A_1 ισχύει ότι $f\left(A_1\right)=\left[e^{-\frac{1}{e}},1\right)$, δηλαδή $f(x)<1<27$ για κάθε $x\in A_1$ άρα η ανίσωση είναι αδύνατη στο A_1

Στο διάστημα A_2 έχουμε $f(x) > 27 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \overset{f1}{\Leftrightarrow} x > 3$ Άρα $x \in (3, +\infty)$

Γ3. Να υπολογισθεί το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\left(\text{συν}\dfrac{1}{f(x)}-1\right)\text{ημ}f(x)\right)$

Απάντηση

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\left(\text{συν}\frac{1}{f(x)}-1\right)\text{ημ}f(x)\right)$$

Θέτω $u=\dfrac{1}{f(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα $u\to 0$. Το όριο λοιπόν γίνεται:

$$\lim_{u\to0}\left(\frac{1}{u}(\text{συν}u-1)\cdot\text{ημ}\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to0}\left(\frac{\text{συν}u-1}{u}\cdot\text{ημ}\frac{1}{u}\right)$$

Για $u\neq 0$ ισχύει ότι

$$\left|\text{ημ}\frac{1}{u}\right|\le1\Rightarrow\left|\frac{\text{συν}u-1}{u}\right|\cdot\left|\text{ημ}\frac{1}{u}\right|\le\left|\frac{\text{συν}u-1}{u}\right|\Rightarrow-\left|\frac{\text{συν}u-1}{u}\right|\le\frac{\text{συν}u-1}{u}\cdot\text{ημ}\frac{1}{u}\le\left|\frac{\text{συν}u-1}{u}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{u\to0}\left|\dfrac{\text{συν}u-1}{u}\right|=0\\ \lim\limits_{u\to0}-\left|\dfrac{\text{συν}u-1}{u}\right|=0\end{array}\right\}\overset{\text{ΚΠ}}{\Rightarrow}\lim_{u\to0}\frac{\text{συν}u-1}{u}\cdot\text{ημ}\frac{1}{u}=0$$

Γ4. Αν Ε είναι το εμβαδό του χωριού μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'x$, της ευθείας $x=1$ και της ευθείας $x=2$ και ισχύει ότι
$\int_1^2\left[E\cdot f(x)+\ln x\cdot f(x)-x\cdot f'(x)\right]dx=0$ τότε να βρεθεί το Ε.

Απάντηση

Ισχύει ότι $E=\int_1^2|f(x)|dx=\int_1^2 f(x)dx$ αφού $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ (από ερώτημα Γ1 – ολικό ελάχιστο $f(e^{-1})>0$)

$$\int_1^2\left[E\cdot f(x)+\ln x\cdot f(x)-x\cdot f'(x)\right]dx=0\Leftrightarrow E\cdot\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2\ln x\cdot f(x)dx-\int_1^2 x\cdot f'(x)dx=0\Leftrightarrow$$

$$E\cdot E+\int_1^2\ln x\cdot f(x)dx-\left[x\cdot f(x)\right]_1^2+\int_1^2 f(x)dx=0\Leftrightarrow E^2+\int_1^2\left[\ln x\cdot f(x)+f(x)\right]dx-(8-1)=0\Leftrightarrow$$

$$E^2+\int_1^2(\ln x+1)\cdot f(x)dx-7=0\Leftrightarrow E^2+\int_1^2 f'(x)dx=7\Leftrightarrow E^2+\left[f(x)\right]_1^2=7\Leftrightarrow E^2+3=7\Leftrightarrow$$

$$E^2=4\Leftrightarrow E=2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x^2}=e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$ **[Σχέση 1]**
- $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\cdot f(x)+\dfrac{x^2e^2}{2}-\dfrac{e^2}{8}\geq 0$ για κάθε $x>0$ **[Σχέση 2]**

Δ1. Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}e^2$ και να βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο $A\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

Απάντηση

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\cdot f(x)+\dfrac{x^2e^2}{2}-\dfrac{e^2}{8}$, με $x>0$

Τότε σύμφωνα με την **σχέση 2**, έχουμε $g(x)\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ολικό ελάχιστο, $x_o=\dfrac{1}{2}$ εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο x_o ως πράξεις παραγωγίσιμων, οπότε από το θεώρημα του Fermat, θα ισχύει ότι $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

Έχουμε $g'(x)=f(x)+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\cdot f'(x)+e^2\cdot x$, οπότε:

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+e^2\cdot\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^2$$

Αντικαθιστώντας στην **σχέση 1** έχουμε: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)-2e^2=e^2\Leftrightarrow f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=3e^2$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης θα είναι:

$$y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y+\frac{e^2}{2}=3e^2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y=3e^2\cdot x-2e^2$$

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι αντιστρέφεται.

Απάντηση

$$f'(x)+\frac{f(x)}{x^2}=e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x}}\cdot f'(x)+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{f(x)}{x^2}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\left(e^{-\frac{1}{x}}\cdot f(x)\right)'=1\Leftrightarrow$$

$\left(e^{-\frac{1}{x}}\cdot f(x)\right)'=(x)'$ άρα από Συνέπειες ΘΜΤ θα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$e^{-\frac{1}{x}}\cdot f(x)=x+c$. Αντικαθιστούμε $x=\frac{1}{2}$ και έχουμε:

$$e^{-2}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow e^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^2\right)=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=-1$$

Άρα $e^{-\frac{1}{x}}\cdot f(x)=x-1\Leftrightarrow f(x)=(x-1)\cdot e^{\frac{1}{x}}$, x>0

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(x-1)\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1-\frac{x-1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x>0$$

αφού $\Delta<0$ άρα η f1 στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση : $f'\left(\frac{f(x)}{e^2}+2\right)=f'(3x)$

Απάντηση

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2}+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{(2x-1)\cdot x^2-\left(x^2-x+1\right)\cdot 2x}{x^4}=$$

$$-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x+1}{x^4}+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2x^3-x^2-2x^3+2x^2-2x}{x^4}=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-x^2+x-1+x^2-2x}{x^4}=$$

$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-x-1}{x^4}<0$ αφού $x>0$ άρα $f'2$ οπότε και 1-1 άρα:

$$f'\left(\frac{f(x)}{e^2}+2\right)=f'(3x)\overset{f'1-1}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)}{e^2}+2=3x\Leftrightarrow f(x)+2e^2=3xe^2\Leftrightarrow f(x)=3e^2x-2e^2$$

Όπου η εφαπτομένη της C_f στο $x_o = \frac{1}{2}$ έχει εξίσωση $y = 3e^2 \cdot x - 2e^2$ και η $f'2$ που σημαίνει ότι η $f4$, άρα η εφαπτομένη της θα βρίσκεται «πάνω» από την C_f εκτός από το σημείο επαφής, άρα μοναδική λύση της εξίσωσης θα είναι το σημείο επαφής $x = \frac{1}{2}$

Δ4. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x+1) + f'(1-x) > e$ για κάθε $x \in (0,1)$

Απάντηση

Τρόπος α

Ισχύει ότι $f1$, άρα $x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \overset{f1}{\Leftrightarrow} f(x+1) > f(1) \Leftrightarrow f(x+1) > 0$

Και $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow 1-x < 1 \overset{f'2}{\Leftrightarrow} f'(1-x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(1-x) > e$

Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι $f(x+1) + f'(1-x) > e$

Τρόπος β

Θεωρούμε $h(x) = f(x+1) + f'(1-x)$, με $x \in (-1,1)$

Έστω $x_1, x_2 \in (-1,1)$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \overset{f1}{\Rightarrow} f(x_1 + 1) < f(x_2 + 1)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \overset{f'2}{\Rightarrow} f'(1-x_1) < f'(1-x_2)$ άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$h(x_1) < h(x_2)$ οπότε η $h1$ στο $(-1,1)$

Για $x > 0 \overset{h1}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x+1) + f'(1-x) > e$