 <p>ΟΜΙΛΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ</p>	ΟΝ/ΜΟ			
	ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ		
	ΤΑΞΗ	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ		
	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	14 / 4 / 2024	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

**ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΘΕΜΑ Α**

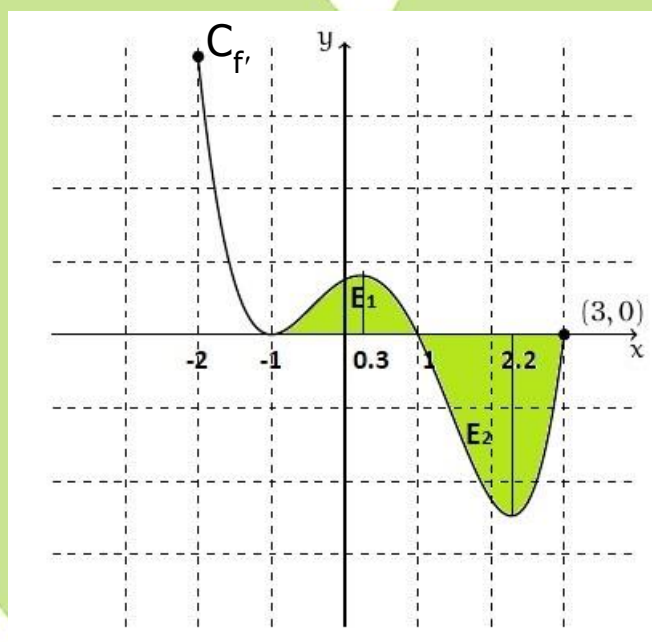
**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$  στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$  να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

**Μονάδες 5**

**A3.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  της οποίας τα κοινά σημεία με τον άξονα  $x'$  είναι τα  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(3, 0)$ . Γνωρίζουμε ότι το  $E_1 = 5$  τ.μ. και  $E_2 = 12$  τ.μ.. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας την σωστή απάντηση στην καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις.



i. Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο:

A.  $[-2, -1]$

B.  $[1, 3]$

Γ.  $[0.3, 2.2]$

Δ.  $[-2, -1] \cup [0.3, 2.2]$

ii. Αν  $I = \int_{-1}^3 f'(x) dx$  τότε:

A.  $I=12$

B.  $I=17$

Γ.  $I=-7$

Δ.  $I=7$

iii. Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο:

A.  $[-1, 0.3]$  και στο  $[2.2, 3]$

B.  $[-2, -0.5]$  και στο  $[1, 3]$

Γ.  $[-1, 1]$

Δ.  $[1, 3]$

iv. Αν  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)}$

A.  $+\infty$

B.  $-\infty$

Γ. 0

Δ. Δεν υπάρχει

**Μονάδες 6**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Έστω  $f$  μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε αυτό. Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε ισχύει ότι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

(ii) Μία συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη είναι και 1-1.

(iii) Αν  $f'(x_0) = 0$  τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό (ή ολικό) ακρότατο της  $f$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 13}{x - 2}$ ,  $x \neq 2$

**B1.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**B2.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$  καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f^2(x) = 36$ .

**Μονάδες 5**

**B3.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**Μονάδες 5**

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B5.** Να χαράξετε την γραφική παράσταση της  $f$ .

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x \ln x}$ ,  $x > 0$

**Γ1.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) > 27$

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογισθεί το:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) \left( \operatorname{csc} \frac{1}{f(x)} - 1 \right) \eta \mu f(x) \right)$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν  $E$  είναι το εμβαδό του χωριού μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , του άξονα  $x'x$ , της ευθείας  $x = 1$  και της ευθείας  $x = 2$  και ισχύει ότι

$$\int_1^2 [E \cdot f(x) + \ln x \cdot f(x) - x \cdot f'(x)] dx = 0 \text{ τότε να βρεθεί το } E.$$

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :

- $f'(x) + \frac{f(x)}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$  για κάθε  $x > 0$
- $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot f(x) + \frac{x^2 e^2}{2} - \frac{e^2}{8} \geq 0$  για κάθε  $x > 0$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^2$  και να βρείτε την εφαπτομένη της  $f$  στο σημείο

$$A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να δείξετε ότι  $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ ,  $x > 0$  και στην συνέχεια να δείξετε ότι αντιστρέφεται.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να λυθεί η εξίσωση :  $f\left(\frac{f(x)}{e^2} + 2\right) = f'(3x)$

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Να δείξετε ότι ισχύει  $f(x+1) + f'(1-x) > e$  για κάθε  $x \in (0,1)$

**Μονάδες 5**

## ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

- 1 Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
- 2 Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3 Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
- 4 Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
- 5 Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 6 Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 7 Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων